Einige Bemerkungen zu den verallgemeinerten Kegelschnitten von Zvonimir Durčević

Anton Gfrerer, Institut für Geometrie, TU Graz

Definition 1. Es seien B, D Punkte und c eine Gerade oder ein Kreis in einer Ebene ε (siehe Abb. 1 bzw. 2). Lässt man einen Punkt C auf c laufen, dann durchläuft der Schnittpunkt X der Geraden $g := DC$ mit der Streckensymmetralen h von B und C eine Kurve k in ε, die wir im Folgenden '*verallgemeinerten Kegelschnitt*' nennen. B heiße '*Brennpunkt*', D '*Leitpunkt*' und c '*Leitlinie*' des verallgemeinerten Kegelschnitts k.

Bemerkung 1. Im Fall, wo c eine Gerade ist, ist die Ortskurve der Halbierungspunkte H der Strecken BC jene Gerade c^* (parallel zu c), die aus c durch Streckung aus B mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ entsteht.
Analog: Ist c ein Kreis, dann ist die Ortskurve der Halbierungspunkte H der Strecken BC jener Kreis c^*, der aus c durch Streckung aus B mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ entsteht.

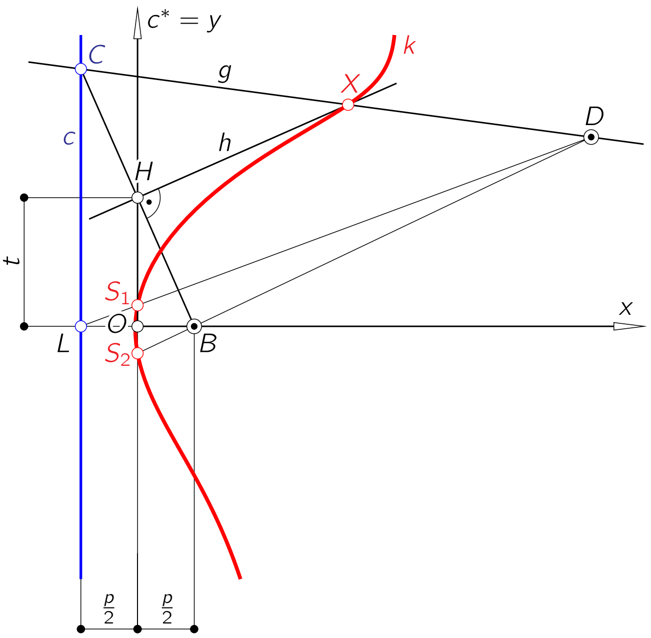

Abbildung 1: Verallgemeinerter Kegelschnitt k mit seinem Brennpunkt B, seinem Leitpunkt D und einer Geraden c als Leitlinie.

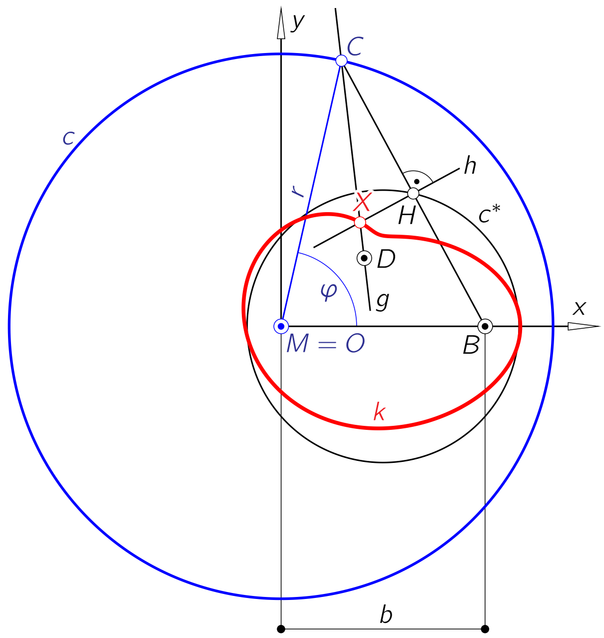

Abbildung 2: Verallgemeinerter Kegelschnitt k mit seinem Brennpunkt B, seinem Leitpunkt D und einem Kreis c als Leitlinie.

1 Verallgemeinerter Kegelschnitt mit einer Geraden als Leitlinie

Wir betrachten zunächst den Fall, wo c eine Gerade ist. Der Abstand des Brennpunktes B von c sei mit p bezeichnet, der Fußpunkt des Lotes aus B auf c heiße L. Für die analytische Beschreibung der Kurve k legen wir die y- bzw. x-Achse des Koordinatensystems in die Gerade c^* bzw. in das Lot aus B auf c. Somit fällt der Koordinatenursprung O in den Halbierungspunkt der Strecke BL.

Der Leitpunkt D besitze Koordinaten $x = d_1$, $y = d_2$. Als Parameter verwenden wir die y-Koordinate t von H. Die Punkte $\left\{\begin{array}{c} B \\ H \\ C \end{array}\right\}$ haben dann bzgl. des gewählten Koordinatensystems die Koordinaten $\left\{\begin{array}{c} x = \frac{p}{2},\ y = 0 \\ x = 0,\ y = t \\ x = -\frac{p}{2},\ y = 2t \end{array}\right\}$. Als Gleichung der Geraden h erhalten wir

$$px - 2ty + 2t^2 \quad = \quad 0. \tag{1}$$

Die Gerade g wird durch die Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{p}{2} - d_1 \\ 2t - d_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{2}$$

erfasst. Durch Einsetzen von (2) in (1) erhalten wir

$$\lambda = \frac{-2t^2 - pd_1 + 2td_2}{-\frac{p^2}{2} - pd_1 + 2td_2 - 4t^2}, \tag{3}$$

was nach Einsetzen in (2) die Koordinaten von X und somit einen Parametrisierung der Kurve k liefert:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2pd_2t - 2(p - 2d_1)t^2}{p^2 + 2pd_1 - 4d_2t + 8t^2} \\ \dfrac{p^2d_2 + 4pd_1t - 4d_2t^2 + 8t^3}{p^2 + 2pd_1 - 4d_2t + 8t^2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Damit ist klar, dass es sich bei k um eine **rationale Kurve mit algebraischer Ordnung kleiner gleich 3** handelt. Durch Elimination des Parameters t aus den beiden Gleichungen (4) erhalten wir ihre Gleichung:

$$\begin{aligned} 8px^3 - 8d_2x^2y + (4p + 8d_1)\,xy^2 + \left(4d_2^2 - 16pd_1\right)x^2 - 8pd_2xy + \left(p^2 - 4d_1^2\right)y^2 \; + \\ + \left(8pd_1^2 + 4pd_2^2\right)x - 2p^2d_2y + p^2d_2^2 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Bemerkung 2. Folgende Eigenschaften lassen sich für verallgemeinerte Kegelschnbitte mit einer Geraden c als Leitlinie leicht überprüfen:

(a) Der Fernpunkt Y_u der Geraden c gehört i. A. dem verallgemeinerten Kegelschnitt k an. Die Richtungen der weiteren Fernpunkte von k erhält man so: Man schneidet den Kreis k_1 mit Durchmesser BD mit der Leitgeraden c. Die Verbindungsgerade von D mit einem so erhaltenen Schnittpunkt gibt dann eine Asymptotenrichtung an. Die drei folgenden Fälle können auftreten: Hat k_1 mit der Leitgeraden $\left\{\begin{array}{c}\text{zwei reelle Punkte}\\ \text{einen reellen Punkt}\\ \text{zwei konjugiert komplexe Punkte}\end{array}\right\}$ gemeinsam, dann besitzt k neben Y_u noch $\left\{\begin{array}{c}\text{zwei reelle Fernpunkte.}\\ \text{einen reellen Fernpunkt.}\\ \text{zwei konjugiert komplexe Fernpunkte.}\end{array}\right\}$

(b) Der Leitpunkt D gehört i.A. dem verallgemeinerten Kegelschnitt k als Singularität an. Weiters: Schneidet man den durch B gehenden und in D zentrierten Kreis k_2 mit der Leitgeraden c, dann sind die Verbindungsgeraden von D mit diesen Schnittpunkten die Tangenten an k in D. Schneiden sich c und k_2 in $\left\{\begin{array}{c}\text{zwei reellen Punkten}\\ \text{einem reellen Punkt}\\ \text{zwei konjugiert komplexen Punkten}\end{array}\right\}$, dann ist D $\left\{\begin{array}{c}\text{Doppelpunkt mit reellen Doppelpunktstangenten.}\\ \text{Spitze}\\ \text{Doppelpunkt mit konjugiert komplexen Doppelpunktstangenten (isolierter Doppelpunkt)}\end{array}\right\}$ der Kurve k.

(c) Liegt der Leitpunkt D auf Geraden BL (= x-Achse) – gilt also $d_2 = 0$ –, dann besitzt der verallgemeinerte Kegelschnitt k diese Gerade als Symmetrieachse. Die Gleichung (5) der Kurve vereinfacht sich dann zu

$$8p\,x^3 + (4p + 8d_1)\,xy^2 - 16pd_1\,x^2 + \left(p^2 - 4d_1^2\right)y^2 + 8pd_1^2\,x = 0. \tag{6}$$

Führt man nun noch den Grenzübergang durch, der D in den Fernpunkt der Geraden BL bringt, dann wird k zu jener Parabel, die B als Brennpunkt und c als Leitlinie besitzt. Das verifiziert man z.B., indem man die Gleichung (6) durch d_1^2 dividiert und dann d_1 gegen ∞ gehen lässt, was (6) in die Gleichung der genannten Parabel überführt:

$$y^2 \quad = \quad 2px$$

In diesem Sonderfall liegt Y_u nicht auf k.

(d) Die y-Achse des gewählten Koordinatensystems hat neben Y_u noch zwei weitere Punkte S_1 und S_2 mit k gemeinsam. Diese erhält man durch die in Abb. 1 dargestellte Konstruktion. Liegt der Leitpunkt D auf BL ($=$ x-Achse), dann fallen S_1 und S_2 zusammen.

2 Verallgemeinerter Kegelschnitt mit einem Kreis als Leitlinie

Nun sei die Leitlinie c ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r (siehe Abb. 2). Wir wählen in diesem Fall jenes Koordinatensystem, dessen Ursprung O mit M zusammenfällt und dessen x-Achse den Brennpunkt B enthält. B hat somit Koordinaten $x = b$, $y = 0$, jene des Leitpunktes D seien $x = d_1$, $y = d_2$.

Bezeichnet φ den Winkel zwischen der x-Achse und einem Radiusvektor $\overrightarrow{OC}$ von c, dann ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{7}$$

eine Parametrisierung von c. Damit besitzt der Punkt H die Koordinaten $x = \frac{1}{2}(b + \cos\varphi)$, $y = \frac{1}{2}\sin\varphi$ und die Streckensymmetrale h hat die Gleichung

$$(r\cos\varphi - b)\cdot x + r\sin\varphi \cdot y - \frac{1}{2}(r^2 - b^2) \quad = \quad 0. \tag{8}$$

Die Gerade g wird durch die Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi - d_1 \\ r\sin\varphi - d_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{9}$$

erfasst. Durch Einsetzen von (9) in (8) erhalten wir

$$\lambda \quad = \quad \frac{2rd_1\cos\varphi + 2rd_2\sin\varphi - r^2 + b^2 - 2bd_1}{2r(b + d_1)\cos\varphi + 2rd_2\sin\varphi - 2r^2 - 2bd_1}, \tag{10}$$

was nach Einsetzen in (9) die folgende Parametrisierung des verallgemeinerten Kegelschnitts k liefert:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} d_1 + \dfrac{\left(2rd_1\cos\varphi + 2rd_2\sin\varphi - r^2 + b^2 - 2bd_1\right)(r\cos\varphi - d_1)}{2r\,(b + d_1)\cos\varphi + 2rd_2\sin\varphi - 2r^2 - 2bd_1} \\ d_2 + \dfrac{\left(2rd_1\cos\varphi + 2rd_2\sin\varphi - r^2 + b^2 - 2bd_1\right)(r\sin\varphi - d_2)}{2r\,(b + d_1)\cos\varphi + 2rd_2\sin\varphi - 2r^2 - 2bd_1} \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{11}$$

Durch die übliche Halbwinkelsubstitution

$$t := \tan\frac{\varphi}{2} \quad \text{und somit} \quad \cos\varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2t}{1 + t^2}$$

erhält man eine *rationale* Parametrisierung von k:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \lambda(t) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{r\cdot(1-t^2) - d_1\cdot(1+t^2)}{1+t^2} \\[2ex] \dfrac{2rt - d_2\cdot(1+t^2)}{1+t^2} \end{pmatrix} \tag{12}$$

mit

$$\lambda(t) = \frac{2rd_1(1-t^2) + 4rd_2t - (r^2+2bd_1-b^2)(t^2+1)}{2r(b+d_1)(1-t^2) + 4rd_2t - 2(bd_1+r^2)(t^2+1)}.$$

Damit ist klar, dass es sich bei k um eine **rationale Kurve von höchstens 4. Ordnung** handelt. Die Gleichung von k ergibt sich durch Elimination des Parameters t aus den beiden Zeilen von (12):

$$\begin{aligned}
4\left(b^2-r^2+d_2^2\right)x^4 \;-\; 8d_1d_2\,x^3y \;+\; 4\left(b^2-2r^2+d_1^2+d_2^2\right)x^2y^2 \;-\; 8d_1d_2\,xy^3 \;+\; 4\left(d_1^2-r^2\right)y^4 \;&+\\
+\; 4\left((b+2d_1)(r^2-b^2)-2bd_2^2\right)x^3 \;+\; 8d_2\left(r^2-b^2+2bd_1\right)x^2y \;&+\\
+\; 4\left(b(r^2-b^2)+2d_1(r^2-bd_1)\right)xy^2 \;+\; 8r^2d_2\,y^3 \;&+\\
+\; \left((r^2-b^2)^2-8bd_1(r^2-b^2)+4b^2d_1^2+8b^2d_2^2-4r^2(d_1^2+d_2^2)\right)x^2 \;&+\\
+\; 8bd_2\left(b^2-r^2-bd_1\right)xy \;+\; \left((r^2-b^2)^2+4(b^2d_1^2-r^2d_1^2-r^2d_2^2)\right)y^2 \;&+\\
+\; 2\left(r^2-b^2\right)\left(2b(d_1^2+d_2^2)-d_1(r^2-b^2)\right)x \;-\; 2d_2\left(r^2-b^2\right)^2y \;+\; \left(r^2-b^2\right)^2\left(d_1^2+d_2^2\right) \;&=\; 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Bemerkung 3. Für einen verallgemeinerten Kegelschnitt k, dessen Leitlinie c ein Kreis ist, gilt:

(a) k besitzt die beiden absoluten Kreispunkte als (konjugiert komplexe) Fernpunkte. Die Richtungen der weiteren Fernpunkte von k erhält man so: Man schneidet den Kreis k_1 mit Durchmesser BD mit dem Leitkreis c. Die Verbindungsgerade von D mit einem so erhaltenen Schnittpunkt gibt dann eine Asymptotenrichtung an. Die drei folgenden Fälle können auftreten: Hat k_1 mit c $\left\{\begin{array}{c}\text{zwei reelle Punkte}\\ \text{einen reellen Punkt}\\ \text{zwei konjugiert komplexe Punkte}\end{array}\right\}$ gemeinsam, dann besitzt k neben den beiden absoluten Kreispunkten noch $\left\{\begin{array}{c}\text{zwei reelle Fernpunkte.}\\ \text{einen reellen Fernpunkt.}\\ \text{zwei konjugiert komplexe Fernpunkte.}\end{array}\right\}$

(b) analog zu Bemerkung 2, (b), wobei lediglich das Wort '*Leitgerade*' durch das Wort '*Leitkreis*' zu ersetzen ist.

(c) Liegt der Leitpunkt D auf jenem Durchmesser von c, der auch B enthält (d.i. die x-Achse) – gilt also $d_2 = 0$ –, dann liegt k symmetrisch bzgl. der x-Achse. Die Gleichung (13) von k vereinfacht sich dann zu

$$\begin{aligned}
4\left(b^2-r^2\right)x^4 \;+\; 4\left(b^2-2r^2+d_1^2\right)x^2y^2 \;+\; 4\left(d_1^2-r^2\right)y^4 \;&+\\
+\; 4(r^2-b^2)(b+2d_1)\,x^3 \;+\; 4\left(b(r^2-b^2)+2d_1(r^2-bd_1)\right)xy^2 \;&+\\
+\; \left(r^2-b^2\right)\left(r^2-b^2-4d_1(2b+d_1)\right)x^2 \;+\; \left(r^2-b^2\right)\left(r^2-b^2-4d_1^2\right)y^2 \;&+\\
+\; 2\left(r^2-b^2\right)\left(2bd_1^2-d_1(r^2-b^2)\right)x \;+\; d_1^2\left(r^2-b^2\right)^2 \;&=\; 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Fällt D sogar in den Mittelpunkt $M = O$ von k, gilt also $d_1 = d_2 = 0$, dann besitzt die Gleichung von k die folgende Gestalt:

$$\left(x^2 + y^2\right)\left(-4(r^2-b^2)x^2 + 4b(r^2-b^2)x - 4r^2y^2 + (r^2-b^2)^2\right) = 0 \tag{15}$$

Daraus[1] erkennen wir, dass k in das Paar isotroper Geraden

$$g_+ \ldots x + iy = 0, \qquad g_- \ldots x - iy = 0$$

durch $M = O$ (hierbei ist $i^2 = -1$) und den durch

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{r^2}{r^2 - b^2}\, y^2 - \frac{r^2}{4} = 0$$

erfassten Kegelschnitt ℓ zerfällt. ℓ besitzt B und D als Brennpunkte und $N(\frac{b}{2}, 0)$ als Mittelpunkt. Für $|b| < |r|$ (also für B innerhalb des Leitkreises c) ist ℓ eine Ellipse mit Hauptachsenlänge r und Nebenachsenlänge $\sqrt{r^2 - b^2}$, für $|b| > |r|$ (also für B außerhalb von c) stellt sich eine Hyperbel mit Achsenlänge r und Asymptotensteigungen $\pm\frac{\sqrt{b^2 - r^2}}{r}$ ein.

[1] Wir lassen hier den Fall $r^2 = b^2$ beiseite, welcher bedeutet, dass B auf c liegt. In diesem Fall zerfällt k in das angeführte isotrope Geradenpaar g_+, g_- und in die x-Achse, welche doppelt zu zählen ist.